Etude des groupes, sous-groupes et transformations de motifs

Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$. On note r_θ la rotation de centre O et d'angle θ, s la symétrie orthogonale de miroir $\left(O, \overrightarrow{i}\right)$.

1 Outils de base

1. Ecrire une fonction $rote\,(\theta, (x, y))$ qui, à partir d'un point $m\,(x, y)$ et de θ fournit le couple (x', y') des coordonnées du point $m' = r_\theta\,(m)$.
2. Ecrire une fonction $sym\,((x, y))$ qui, à partir d'un point $m\,(x, y)$ fournit le couple (x', y') des coordonnées du point $m' = s\,(m)$.

2 Etude du groupe diédral $(D_{2n}, \circ)$ pour $n = 4$.

On pose d'abord $n = 4$ et $r_\theta = r_{\pi/2}$.

1. On considère l'ensemble des transformations du plan défini par

$$D_8 = \{\sigma_0, ..., \sigma_{2n-1}\} = \left\{r^0, r^1, r^2, r^3, s, s \circ r^1, s \circ r^2, s \circ r^3\right\}$$

   En utilisant les résultats des travaux dirigés, rappeler le lemme fondateur et écrire des fonctions :

   - $trad\_dec\_qu(k)$, qui à partir de $k \in \{0, ..., 2n-1\}$, fournit (α, β) tel que, en base quatre, k s'écrive $\alpha\beta$;
   - $trad\_qu\_dec\,((\alpha, \beta))$, qui à partir de (α, β) considéré comme écriture en base quatre, renvoie l'entier décimal k associé.

2. Utiliser les résultats antérieurs et le travail préparatoire mené en td, pour construire la table $(tab(i, j))_{0 \leq i, j \leq 2n-1}$de la loi $\circ$ sur D_8. Pour ce faire, on écrira une fonction $compose\,(\sigma_i, \sigma_j)$ qui à partir des transformations σ_i et σ_j de D_8, détermine l'entier k compris entre 0 et $2n - 1$ défini par : $\sigma_i \circ \sigma_j = \sigma_k$.

3. Faire le plan des propriétés à établir pour démontrer que $(D_8, \circ)$ est un groupe non abélien ; on fournira le plan sommaire des algorithmes qui permettront de l'établir. Ecrire une fonction $inverse(i)$ qui, à partir de la transformation σ_i renvoie le numéro j de son inverse dans le groupe ; on évitera tout algorithme de recherche poussif et on privilégiera d'éventuels résultats théoriques obtenus en travaux dirigés.

4. Stocker la table relative au groupe diédral D_8.

5. Déterminer l'ensemble des sous-groupes de D_8, en utilisant les sous-groupes engendrés par chacun des éléments du groupe, puis par deux éléments bien choisis.

   - Construire les outils logiciels nécessaires en prévoyant leur généralisation éventuelle.
   - Fournir le diagramme de Hasse des sous-groupes de D_8 pour la relation d'inclusion.

3 Etude du groupe diédral $(D_{2n}, \circ)$ pour n quelconque.

Reprendre la théorie antérieure (hormis la question 5, dans un premier temps...) pour un entier n quelconque supérieur à 2. On écrira les fonctions généralisées de celles déjà écrites, en considérant n comme un paramètre complémentaire.

4 Transfert d'un motif

On considère un motif de base $\mathcal{M}_0$ constitué des segments construits en considérant dans cet ordre $\{O, A, B\}$ avec $A\,(2,2)$ et $B\,(2,1)$.

On fait opérer les transformations du plan sur les points, comme d'ordinaire, via $\sigma * m = \sigma\,(m)$.

1. Pour chaque sous-groupe H de D_8, représenter le motif $\mathcal{M}_H$ obtenu en faisant opérer le sous-groupe H sur $\mathcal{M}_0$. On pourra écrire une fonction $creat\_motif\,(H)$ qui à partir du sous-groupe passé comme paramètre sous une forme choisie par l'étudiant, produira une figure représentant $\mathcal{M}_H$.
2. Expliquez brièvement, mais avec précison, quelle stratégie vous adopterez, si vous devez transférer un motif obtenu à partir d'une forme de base élémentaire, sous l'opération d'un groupe donné.
3. Prolongement éventuel : reprendre l'exercice avec un motif de base $\mathcal{M}_0$ plus élaboré !