MT44 - TP2
Intégration numérique

Laurent Couvidou – rendu le 30 mai 2006

---

1. Intégration classique

1. *Calculs*

On applique la méthode vue en cours et en TD pour l'approximation de l'intégrale d'une fonction f sur l'intervalle [A,B] :

- Recherche de M = maximum en valeur absolue de la dérivée i^{ième} de f[1]. Trouver le maximum réel demanderait une coûteuse résolution d'équation en symbolique. On effectue donc deux approximations :

  i . La dérivée est approchée numériquement via des différenciations (cf. la fonction récursive dans `derivee_approx.m`).

  ii . On se contente d'un nombre fini d'échantillons sur l'intervalle [A,B].

- Calcul du pas théorique maximum h_{max} en fonction de M et de la précision ε demandée. On utilise les formules vues en TD :

Rectangles	*Trapèzes*	*Simpson*
$h_{max}=\frac{2\epsilon}{M(B-A)}$	$h_{max}=\sqrt{\frac{12\epsilon}{M(B-A)}}$	$h_{max}=2\cdot\sqrt[4]{\frac{180\epsilon}{M(B-A)}}$

- Réduction au pas réel h, donnant un nombre d'intervalles entier.

- Détermination du nombre de points où f va être évaluée, en fonction du nombre n d'intervalles.

Rectangles	*Trapèzes*	*Simpson*
n	n+1	2n+1

- Et enfin calcul de l'intégrale approchée via les formules du cours :

Rectangles	*Trapèzes*	*Simpson*
$I=h\cdot\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)$	$I=\frac{h}{2}\cdot(f(A)+f(B))+h\cdot\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)$	$I=\frac{h}{6}\cdot(f(A)+f(B)+2\cdot\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)+4\cdot\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i+\frac{h}{2}))$

Voir `integ_classique.m` pour l'implémentation.

Notons que la méthode des rectangles choisie par le sujet est « à gauche ». On implémente en supplément la méthode des milieux, qui donne souvent de bons résultats.

1 i=1 pour les rectangles, i=2 pour les trapèzes et i=4 pour Simpson

2. *Mise en œuvre et tests de performance*

On teste l'approximation de $I = \int_0^{\pi/2} \sin(x)\,dx$ pour chaque méthode et avec successivement $\varepsilon = 10^{-3}$ et $\varepsilon = 10^{-3}$ (cf. `integ_classique_test.m`) :

```
>> format long

>> [I,k] = integ_classique('rectangle',0,pi/2,0.001,sin(x))
I = 0.99936288327270
k = 1233

>> [I,k] = integ_classique('rectangle',0,pi/2,0.00001,sin(x))
I = 0.99999363378593
k = 123370

>> [I,k] = integ_classique('milieu',0,pi/2,0.001,sin(x))
I = 1.00071430404316
k = 12

>> [I,k] = integ_classique('milieu',0,pi/2,0.00001,sin(x))
I = 1.00000637416070
k = 127

>> [I,k] = integ_classique('trapeze',0,pi/2,0.001,sin(x))
I = 0.99928842206709
k = 18

>> [I,k] = integ_classique('trapeze',0,pi/2,0.00001,sin(x))
I = 0.99999358269023
k = 180

>> [I,k] = integ_classique('simpson',0,pi/2,0.001,sin(x))
I = 1.00000000000357
k = 313

>> [I,k] = integ_classique('simpson',0,pi/2,0.00001,sin(x))
I = 1.00000000000004
k = 993
```

On constate que la méthode des rectangles à gauche est nettement plus « gourmande » que les 3 autres, ce qui était prévisible.

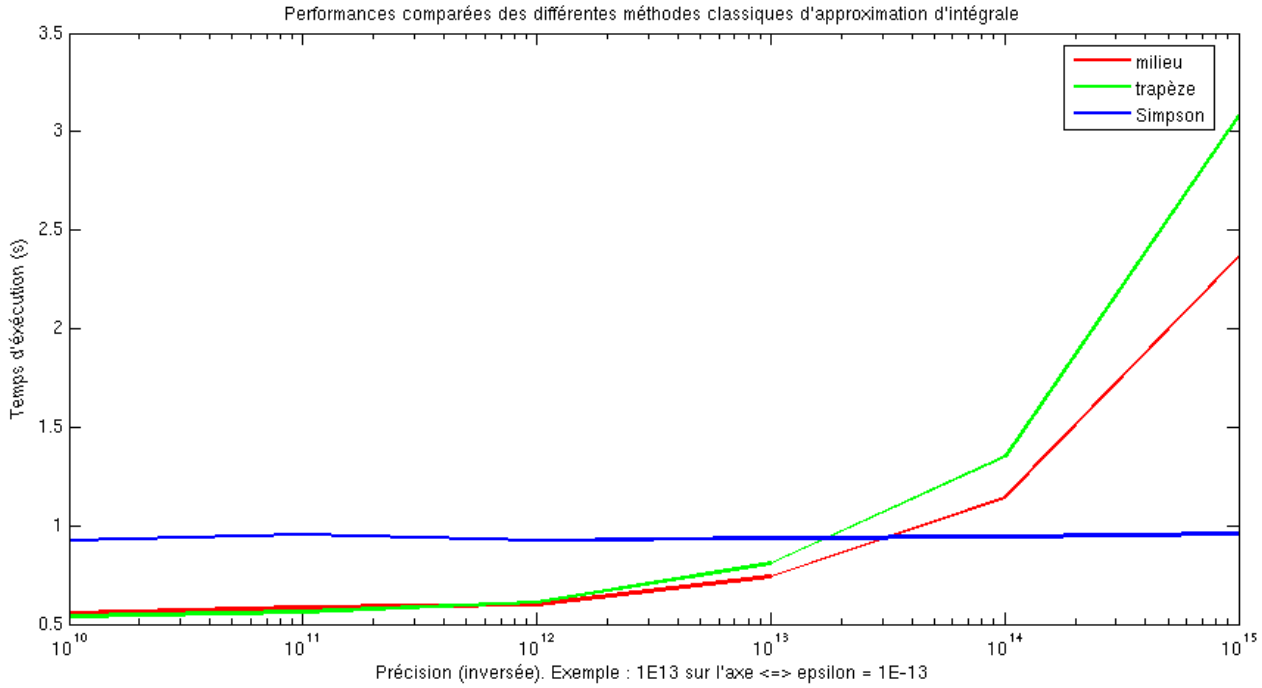
La méthode des milieux et celle des trapèzes sont du même ordre : là aussi, les résultats confirment la théorie.

Enfin, pour la méthode de Simpson, on constate que la précision est toujours nettement meilleure que celle demandée. Est-ce dû au nombre de points, qui apporte beaucoup de précision sauf dans certains cas particuliers ? Dans tous les cas, le calcul du pas est conforme à celui trouvé en TP, le « problème » ne vient donc pas de là.

On peut représenter graphiquement les performances des différentes méthodes, en comparant leurs temps d'exécution en fonction de la précision demandée.

L'approximation de $I = \int_0^{\pi/2} \sin(x)\,dx$ est encore une fois utilisée.

On élimine la méthode des rectangles, qui est beaucoup trop lente en comparaison des 3 autres, et on obtient le résultat suivant :



Si en dessous de $\varepsilon = 10^{-13}$, les méthodes des milieux et des trapèzes sont les plus avantageuses, on constate qu'au delà, la méthode de Simpson prends le dessus. Ce sera donc la méthode indiquée pour les calculs demandant une très haute précision.

Voir `integ_classique_performances.m`pour la génération du graphe.

2. Intégration gaussienne